Département des Sciences Economiques et Gestion

Filière : Sciences Economiques et Gestion

Semestre 2

Module: Probabilités

Pr. AIT CHEIKH

Année universitaire 2019 - 2020

Chapitre 1:

Analyse combinatoire

Plan du Chapitre

- Section 1: Permutations
- Section 2 : Arrangements
- Section 3 : Combinaisons
- Section 4: Binôme de NEWTON

Introduction

L'analyse combinatoire, fondée sur des formules de **permutations et de combinaisons,** possède d'importantes applications dans de nombreuses branches :

- Mathématiques (exemple : théorie des probabilités) ;
- Statistiques (exemple : Nombre d'arrangements possibles des éléments d'un système) ;

L'objectif de ce chapitre est d'exposer les principaux éléments de l'analyse combinatoire qui permettent de calculer et de dénombrer les probabilités de certains événements.

But de l'analyse combinatoire est le **dénombrement** (Comptage) des groupes d'éléments formés à partir d'un ensemble.

On distingue *deux types d'ensembles*:

1. Tel que $\Omega = \{a, b, c, d\}$ formé des éléments *tous différents* : dit discernable.

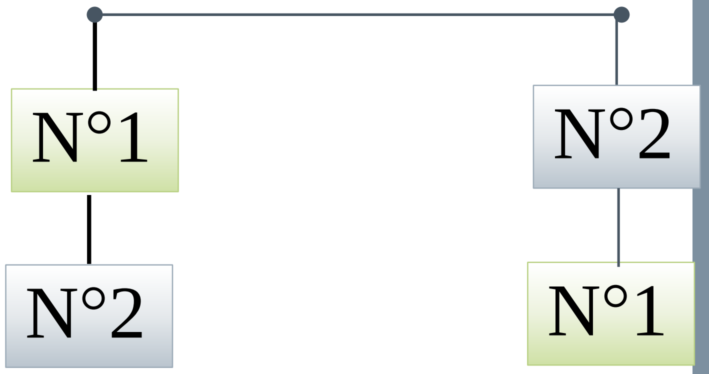
2. Tel que $\Omega = \{a, a, b, b, b, \}$ formé des éléments *non différents*: dit indiscernable.

Quelques Définitions

- ✓ *Disposition* est un groupe d'élément pris dans un ensemble
- ✓ *Disposition sans* répétition : c'est une disposition où un élément peut apparaître 0 ou 1 fois.
- ✓ *Disposition avec* répétition : un élément peut figurer plus d'une fois.
- ✓ *Disposition ordonnée* : l'ordre d'obtention d'un élément est important.
- ✓ *Disposition non-ordonnée* : l'ordre d'obtention d'un élément n'est pas important, on n'en tient pas compte dans la caractérisation de la disposition.

Exemple 1

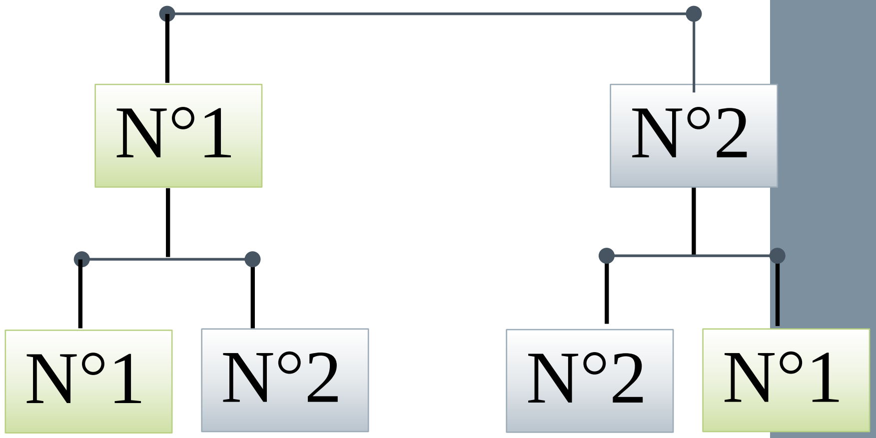
Une urne contient 2 boules N°1 et N°2.



A. On tire successivement et **sans remise** les deux boules.

Les résultats possibles sont les couples (1,2) et (2,1): se sont donc des *dispositions sans répétition*.

Nombre total des choix est : 2



B. On suppose que la première boule **est remise** dans l'urne avant de réaliser le second tirage.

Les résultats possibles sont : (1,1) (1,2) (2,1) et (2,2): se sont *des dispositions avec répétition*

Nombre total des choix est : 4

Définition :

Une ***permutation sans répétition*** *d'un ensemble de* ***n*** *éléments est* une disposition *ordonnée* de ces éléments, où chaque élément de l'ensemble figure *une seule fois* et y occupe un **rang déterminé** (***objets discernables***).

Le nombre de permutation sans répétition qu'on peut former à partir d'un ensemble de n éléments est égale à : $\boldsymbol{P_n = n!}$

Exemple

On a 3 lettres a, b, c

Les permutations sont les sous-ensembles ordonnés de $\{a, b, c\}$

$$(a, b, c)\ (a, c, b)\ (b, a, c)\ (c, a, b)\ (c, b, a)\ (b, c, a)$$

Le nombre de résultat possible est : 6 $(6 = 3 \times 2 = 3!)$ donc

$$\boldsymbol{P_n = n!}$$

$$\boldsymbol{P_3 = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6}$$

Notation factorielle

$$\boldsymbol{n}! = \mathbf{1} \times \mathbf{2} \times \mathbf{3} \times .. \times (\boldsymbol{n} - \mathbf{2}) \times (\boldsymbol{n} - \mathbf{1}) \times \boldsymbol{n}$$

Pour des raisons de commodité, on définit **0! = 1**

Exemple 2

La configuration des plaques d'immatriculation au Maroc est composée de :

Q ? Combien de plaques différentes peut-on imprimer ?

Il y a ***28 façons*** différentes d'imprimer une lettre arabe, puisque il y a 28 lettres en langue arabe. ***9 façons*** différentes d'imprimer le premier chiffre et ***dix façons*** différentes d'imprimer les deux autres chiffres.

$$\mathbf{9 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 28 \times 9 \times 10 = 226\,800\,000}$$

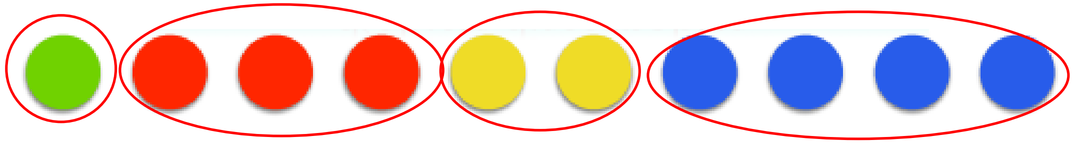
On en déduit que l'on peut imprimer **226 800 000** plaques différentes.

Définition :

On appelle *permutation avec répétition* de n éléments d'un ensemble E, une disposition ordonnée des n éléments de l'ensemble E où le premier élément figure $\boldsymbol{n_1}$ fois, le second $\boldsymbol{n_2}$ fois, …, et le dernier élément y figure $\boldsymbol{n_r}$ fois. (***objets indiscernables*)**. Le nombre de permutation avec répétition est noté

$$\boldsymbol{P_{(n_1,n_2,..,n_r)} = \frac{n!}{n_1!\times n_2!\times..\times n_r}}$$

Exemple :



On a 10 billes

Ici, on a 10! permutations de ces 10 billes

Si on suppose que chaque couleur forme un ensemble discernable. 4 ensembles.

Le nombre de résultat possible est donc

$$P_{(n_1,,n_2,n_3,n_4)} = \frac{n!}{n_1!\times n_2!\times n_3!\times n_4!} = \frac{10!}{1!\times 2!\times 3!\times 4!} = 12\ 600$$

Définition :

On appelle ***Arrangement sans répétition*** de p éléments choisis parmi n, une disposition *ordonnée sans répétition* de p éléments choisis parmi n, où chaque élément figure *une seule fois*.

Le nombre d'arrangements sans répétition de p éléments choisis parmi n est égale à: $$\boldsymbol{A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}}$$

Exemple :

On a 3 lettres a, b, c

Les arrangements possibles de $\mathrm{E} = \{a, b, c\}$ pris deux à deux sont:

$$(a, b)\ (a, c)\ (b, a)\ (b, c)\ (c, a)\ (c, b)$$

Le nombre de résultat possible est :

$$A_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{3!}{1!} = 3 \times 2 = 6$$

Remarque

Dans les arrangements sans répétions $\boldsymbol{A_n^p} = \frac{\boldsymbol{n}!}{(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{p})!}, \quad \boldsymbol{p} \leq \boldsymbol{n}$

Si $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{n}$:

on retrouve la formule du nombre de permutation sans répétition:

$$\boldsymbol{P_n} = \boldsymbol{n}!$$

Définition :

On appelle ***Arrangement avec répétition*** de p éléments parmi n éléments, une disposition, *ordonnée avec répétition,* de p éléments choisis parmi n.

Le nombre d'arrangements avec répétition est noté $\boldsymbol{\mathcal{A}_n^p = n^p}$

Exemple :

On a 3 lettres a, b, c
Les arrangements possibles avec répétition de deux éléments :

$$(\boldsymbol{a,a})(a,b)(a,c)\ (b,a)(\boldsymbol{b,b})(b,c)\ (c,a)\ (c,b)(\boldsymbol{c,c})$$

Le nombre de résultat possible est :

$$\mathcal{A}_3^2 = 3^2 = 9$$

Définition :

Le nombre de **combinaisons sans répétition** de **p éléments** qu'on peut former à partir des **n éléments** d'un ensemble E est noté ***C*** et est égale à:

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p! \times (n-p)!}$$

Exemple:

On a 3 lettres a, b, c

Les combinaisons possibles sans répétition, ***pris deux à deux*** sont: 3

$$\{a, b\}; \{a, c\}; \{b, c\}$$

Il s'agit d'une opération analogue à l'arrangement, mais cette fois deux dispositions comportant les mêmes lettres sont considérées comme identiques

$$\boldsymbol{C_3^2 = \frac{3!}{2! \times (3-2)!} = \frac{3 \times 2}{2 \times 1} = 3}$$

Exemple:

Lors d'un tirage, on pige 4 boules parmi 12 boules numérotées de 1 à 12.

Combien de combinaisons différentes peut-on obtenir?

$$C_{12}^{4} = \frac{12!}{4! \times (12-4)!} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times \cancel{8!}}{4 \times 3 \times 2 \times \cancel{8!}} = 495$$

Autres résultats:

$$C_n^0 = 1 \qquad C_n^n = 1 \qquad C_n^1 = n$$

Définition :

On appelle ***Combinaison avec répétition*** de p éléments choisis parmi n éléments une disposition *non ordonnée*, avec répétition, de p éléments choisis parmi les n éléments.

Le nombre de combinaisons avec répétition est égale:

$$\boldsymbol{K_n^p = C_{n+p-1}^p = \frac{(n-1+p)!}{p! \times (n-1)!}}$$

Exemple:

On a 3 lettres *a*, *b*, *c*

Les combinaisons possibles avec répétition pris deux à deux sont: 6

$$\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}\};\{a,b\};\{a,c\};\{\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}\};\{b,c\};\{\boldsymbol{c},\boldsymbol{c}\}$$

$$K_3^2 = C_{3+2-1}^2 = C_4^2 = \frac{(3+2-1)!}{2!\times(3-1)!} = \frac{4\times3\times2}{2\times2} = 6$$

Coefficients binomiaux

En mathématiques, les coefficients binomiaux, définis pour tout entier naturel *n* et tout entier naturel *p* inférieur ou égal à *n*, donnent le nombre de parties de *p* éléments dans un ensemble de *n* éléments.

On les notes: $\binom{n}{p}$ ou C_n^p

$$\binom{n}{p} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)}{p(p-1)(p-2)\ldots 3.2.1} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)\times(n-p)!}{p(p-1)(p-2)\ldots 3.2.1\times(n-p)!}$$

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\times(n-p)!}$$

Exemple

$$\binom{8}{2} = \frac{\overbrace{8 \times 7}^{2\ termes}}{2 \times 1} = 28$$

$$\binom{9}{4} = \frac{\overbrace{9 \times 8 \times 7 \times 6}^{4\ termes}}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 126$$

$$\binom{12}{5} = \frac{\overbrace{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8}^{5\ termes}}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 792$$

Coefficients multinomiaux

Soit $\boldsymbol{p}$ nombres $\boldsymbol{n_{1,} n_{2,,,} n_p}$, tels que $\boldsymbol{n_1 + n_{2+,,,} + n_p = n}$.

Le terme: $$\binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{n_{1,} n_{2,,,} n_p}} = \frac{\boldsymbol{n}!}{\boldsymbol{n_1}!\boldsymbol{n_2}!\ldots\ldots\ \boldsymbol{n_p}!}$$

Ce coefficient représente le nombre de répartitions possibles de n objets en r groupes distincts de tailles respectives $\boldsymbol{n_{1,} n_{2,,,} n_p}$

Coefficients multinomiaux

Exemple:

$$\binom{6}{3,\ 2,\ 1} = \frac{6!}{3!\,2!\,1!} = 60$$

$$\binom{10}{5, 3,\ 2,\ 2}$$

$$Attention\ (n_1 + n_{2,,,}\ + n_p = n)$$

5+3+2+2 # 12

Définition

La formule du binôme de Newton est une formule mathématique donnée par **Isaac Newton** pour trouver le développement d'une puissance entière quelconque d'un **binôme**. Elle est aussi appelée **formule du binôme** ou **formule de Newton**.

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Comment calculer $(a + b)^7$ ou $(a + b)^n$?

Les différentes puissances d'un binôme.

Identités remarquables

$$(x+a)^0 = 1$$

$$(x+a)^1 = x + a$$

$$(x+a)^2 = (x+a)(x+a) = x^2 + 2ax + a^2$$

$$(x+a)^3 = (x+a)^2(x+a) = (x^2 + 2ax + a^2)(x+a)$$

$$= x^3 + ax^2 + 2ax^2 + 2a^2x + a^2x + a^3$$

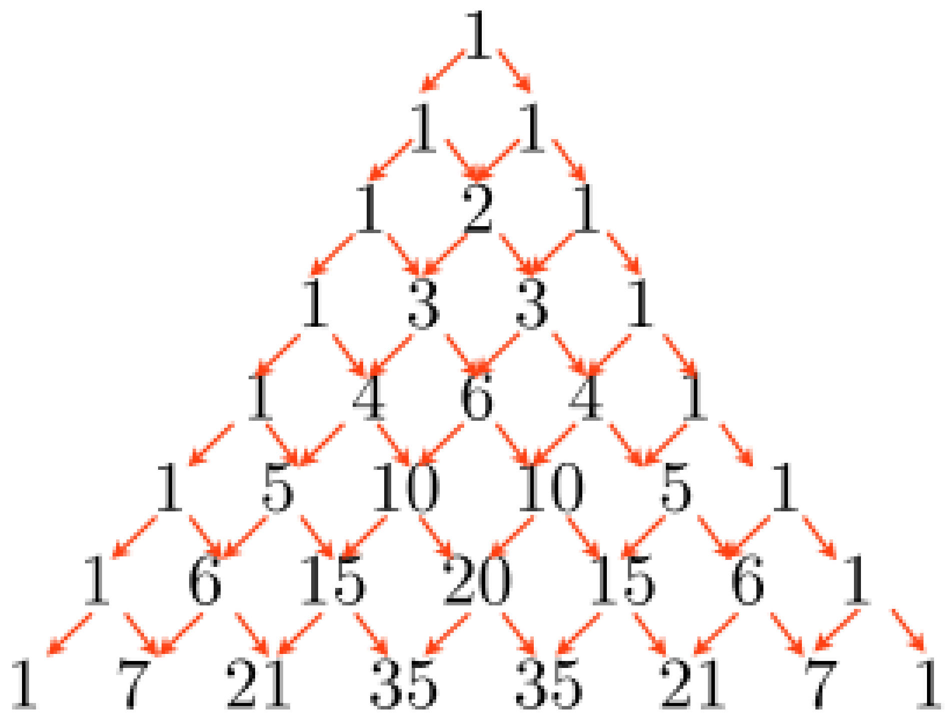
$$= x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3$$

$$(x+a)^4 = (x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3)(x+a)$$

$$= x^4 + ax^3 + 3ax^3 + 3a^2x^2 + 3a^2x^2 + 3a^3x + a^3x + a^4$$

$$= x^4 + 4ax^3 + 6a^2x^2 + 4a^3x + a^4$$

Triangle de Pascale




Blaise Pascale
(1623-1662)

$$(x+a)^0 = 1$$

$$(x+a)^1 = x + a$$

$$(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$$

$$(x+a)^3 = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3$$

$$(x+a)^4 = x^4 + 4ax^3 + 6a^2x^2 + 4a^3x + a^4$$

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p},$$
$$1 \leq r \leq n$$

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^{n-p} b^p$$

$n=0$	1							
$n=1$	1	1						
$n=2$	1	2	1					
$n=3$	1	3	3	1				
$n=4$	1	4	6	4	1			
$n=5$	1	5	10	10	5	1		
$n=6$	1	6	15	20	15	6	1	
$n=7$	1	7	21	35	35	21	7	1

$$(x+a)^0 = 1$$

$$(x+a)^1 = x + a$$

$$(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$$

$$(x+a)^3 = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3$$

$$(x+a)^4 = x^4 + 4ax^3 + 6a^2x^2 + 4a^3x + a^4$$

Synthèse

Rangement de n objets distincts:

$$P_n = n! \quad \text{permutations possibles}$$

Rangement de n objets avec k répétitions d'un même objet :

$$P_n = \frac{n!}{k!} \quad \text{permutations possibles}$$

Rangement de p objets parmi n :

sans répétition $$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} \quad \text{arrangements possibles}$$

avec répétitions $$A_n^p = n^p \quad \text{arrangements possibles}$$

Tirage de p objets parmi n :

sans remise $$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!} \quad \text{combinaisons possibles}$$

avec remise $$C_{n+p-1}^p = \frac{n+p-1!}{p!(n-1)!} \quad \text{combinaisons possibles}$$

Formule de PASCAL (application au triangle de Pascal) :

$$C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p = C_n^p$$

Formule du binôme de NEWTON (application au calcul des probabilités d'une loi binomiale)

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^{n-p} b^p = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^{n-p} b^p$$

Exercices

Q4.5. Trouver le septième terme du développement de $(a + b)^8$

Exercices

Q2.4. Combien de repas complets différents peut-on former si une cafeteria propose deux choix de soupe, trois choix de repas principal et trois choix de dessert ?

Exercices

Q2.6. De combien de façons peut-on aller de Tanger à Casablanca, puis à Agadir si le trajet entre chaque ville peut se faire en voiture, en autobus, par train ou par avion ?

Exercices

Q3.1. En supposant qu'il n'y a pas de répétitions,

(i) Combien de nombres de 3 chiffres peut-on former à l'aide des six chiffres 2, 3, 5, 6, 7 et 9 ?

(ii) Combien de ces nombres sont inférieurs à 400 ?

(iii) Combien sont pairs ?

(iv) Combien sont impairs ?

Exercices

Q3.4. Combien de permutations distinctes peut-on former avec toutes les lettres des mots (d'anagrammes) MISTASSINI, SOCIOLOGIQUE.

Exercices

Q3.6. Supposons qu'une urne contient 8 boules. Déterminer le nombre d'échantillons de taille 3 (i) non exhaustifs, (ii) exhaustifs.

Exercices

Q5.3. Une classe comporte 9 garçons et 3 filles. (i) De combien de manières le professeur peut-il faire un choix de 4 élèves ? (ii) Combien de ces choix comportent au moins une fille ? (iii) Combien comportent exactement une fille ?